CAPÍTULO I : FUNCIONES REALES

**FUNCIÓN REAL:**

Sean A y B dos conjuntos

Una relación **f** de A en B es una función si y solo si se cumplen las condiciones:

**1°) Existencia: **

**2°) Unicidad: **

En este curso de Cálculo I nos interesan especialmente las funciones reales de variable real o funciones escalares, que son funciones definidas de la siguiente manera:

f : D 🡪 IR D ⊂ IR

dada por y = f(x)

**ANALISIS FUNCIONAL**

* **DOMINIO DE UNA FUNCIÓN**

Es el conjunto de valores de A, que hacen que la expresión y = f(x) tenga sentido. Es decir que al reemplazar en la fórmula de la función ese valor, se obtenga como imagen un valor real.

A los elementos del dominio los anotaremos generalmente con **x**, y la denominaremos variable independiente

En símbolos,

**D(f) = {x ∈ A / (x ; y) ∈ f } = A**

* **IMAGEN DE UNA FUNCIÓN:**

Es el conjunto de valores **y** de B (codominio) tales que tienen una pre-imagen en A = D(f). Generalmente indicaremos los valores de la imagen con la letra **y**, la denominaremos variable dependiente

En símbolos:

**Im(f) = {y ∈ B / (x ; y) ∈ f } ⊆ B**

**Ejemplos:**

1. **f(x) = ( x -2 ) 2 +2**

**Por ser polinómica D = IR**

**Para determinar su conjunto imagen graficamos:**

Vemos que I = [ 2 , ∞[

1. **g(x) = x 3**

Por ser polinómica D = IR , pero por ser de grado impar I = IR

**Gráficamente:**



**Observación:**

**En el caso de la funciones polinómica, el dominio es siempre todos los reales, pero la imagen depende del grado de la función:**

* **Si el grado es impar, el conjunto imagen son todos los reales**
* **Si el grado es par, el conjunto imagen depende del ejercicio en particular.**

1. ** esta función no es polinómica, se llama función signo**

En este caso para determinar el dominio hay que tener en cuenta que la variable está en el denominador, por lo tanto no puede ser cero, ya que no se puede dividir por cero.

Por lo tanto  **D = IR - {0}= IR\***

**Gráficamente**

**En este caso I = {- 1 , 1}**

* **CEROS O RAÍCES DE UNA FUNCIÓN**

Son los valores del dominio para los cuales la función se anula. Es decir la imagen es cero. En símbolos:

**a es un cero o raíz de f ⇔ a ∈D y f(a) = 0**

Si **a** es una raíz real, el gráfico de la función f(x) corta al eje de abscisas en el punto **(a ; 0)**.

* **INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD**

Una función es positiva en un intervalo I de su dominio, si se verifica que 

**C+ = {x / x ∈I , f(x) > 0}**

Una función es negativa en un intervalo I de su dominio, si se verifica que 

**C - = {x / x ∈I , f(x) < 0}**

Ejemplos: a) Hallar las raíces de las siguientes funciones y graficar

b) Graficar y hallar los intervalos de positividad y negatividad

a) 

b) f(x) = - x5 + 6 x3

* **PARIDAD DE UNA FUNCIÓN**

## FUNCIÓN PAR

**f es una función par ⇔ ∀x ∈D: f(–x) = f(x)**

### FUNCIÓN IMPAR

**f es una función impar ⇔ ∀x ∈D: f(–x) = – f(x)**

Ejemplos: Graficar las siguientes funciones, y analizar la paridad de cada una

1. ****

1. ****
2. 
3. 

* **FUNCIONES MONÓTONAS**

**FUNCIÓN CRECIENTE:** Una función **f**, definida en un conjunto **D**, es creciente en dicho conjunto si y sólo si:

**(∀ x1 ∈ D) (∀ x2 ∈ D) : [x1 < x2 ⇒ f(x1) <f(x2) ]**

f es  **CRECIENTE EN FORMA NO ESTRICTA** en D si y sólo si:

**(∀ x1 ∈ D) (∀ x2 ∈ D) : [x1 < x2 ⇒ f(x1) ≤ f(x2) ]**

**FUNCIÓN DECRECIENTE:** Una función **f**, definida en un conjunto **D**, es decreciente en dicho conjunto si y sólo si:

**(∀ x1 ∈ D) (∀ x2 ∈ D) : [x1 < x2 ⇒ f(x1) >f(x2) ]**

f es  **DECRECIENTE EN FORMA NO ESTRICTA** en D si y sólo si:

**(∀ x1 ∈ D) (∀ x2 ∈ D) : [x1 < x2 ⇒ f(x1) ≥ f(x2)]**

Diremos que (**x0 , f(x0))** es un **punto estacionario** de la función, si pasa de creciente a decreciente o viceversa en dicho punto.

Ejemplos: ( Graficar)

1. 

1 si x < 0

b) f(x) =

1 - x si x ≥ 0

1 si x 0

c) f(x) =

-1 si x < 0

d) h(x) = ent(x)

* **FUNCIÓN ACOTADA**

**Antes de ver función acotada debemos ver el siguiente tema:**

**COTAS Y EXTREMOS DE UN CONJUNTO**

**Cota Superior: k** es una cota superior de un conjunto **C** de números reales si y sólo si



.

Ejemplo:

A = 

5

El conjunto de las cotas superiores está formado por todos los números reales que son mayores o iguales a 5, en símbolos: **cotas sup = [5;∞[**

En este caso se dice que el conjunto está **acotado SUPERIORMENTE**

**Cota Inferior: k** es una cota inferior de un conjunto **C** de números reales si y sólo si



Ejemplo**: A = [ 2 , ∞[**

**2**

El conjunto de las cotas inferiores está formado por todos los números reales que son menores o iguales a 2, en símbolos: **cotas inf = ]- ∞ , 2 ]**

En este caso se dice que el conjunto está **acotado INFERIORMENTE**

**CONJUNTO ACOTADO**

Diremos que un conjunto **C** de números reales es **acotado**, si está acotado superior e inferiormente.

Por ejemplo:

A = ]-1 , 3 [ es un conjunto acotado, ya que tiene cotas superiores e inferiores

B = [2 , ∞ [ no es acotado, pero si está acotado inferiormente

Ahora sí definiremos **función acotada**:

**Una función f está acotada si y sólo si su conjunto imagen - Im(f) - es un conjunto acotado. Podemos encontrar algunas funciones acotadas superiormente o acotadas inferiormente, según lo sea su conjunto imagen.**

**Ejemplos: Grafique y analice si esta acotada o no**

1. **f: [-1 , 3] 🡪IR f(x) = ( x – 1 ) 2**
2. **f: IR 🡪IR f(x) = ( x – 1 ) 2**
3. **f: [-2 , 3] 🡪IR f(x) = 2 x**
4. **f: IR 🡪IR f(x) = 2 x**
5. **f: IR 🡪IR f(x) = cos x**

**🡪 FUNCIÓN PERIÓDICA**

Sea T un número positivo, llamado período, y **f** una función definida en **D**

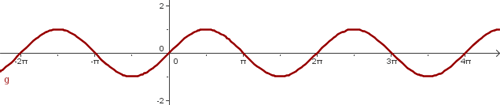
**f(x) es periódica si y solo si ∀x: f ( x ) = f (x+ n.T) ∀x∈ D**

para n entero positivo

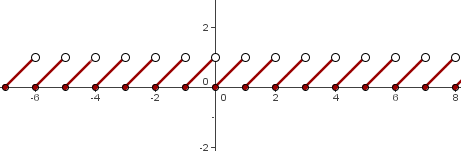
Ejemplos:

I) La función f(x) = sen x es periódica de período 2 π, ya que cumple que:

sen(x+2 π ) = sen x **∀x∈ IR**



**II) La función mantisa, f(x) = x - ent(x), es periódica de periodo 1.**



**FUNCIONES REALES - CLASIFICACIÓN**

Algunas funciones reales muy usadas en esta materia son las siguientes:

1. **Funciones polinómicas:**

Son funciones definidas de la siguiente manera

**f: IR🡪IR dada por y = a0 + a1 x + a2 x2 + a3 x3 + ........ + an xn**

donde **n** es el grado de la función polinómica y los **a i** son números reales, llamados coeficientes

Ejemplos:

f(x) = 3x -1



g(x) = x 5 – 1



q(x) = - x 4 +4 x 2



Para realizar la gráfica de estas funciones se ha de tener en cuenta el grado del polinomio y el signo del coeficiente dominante. Sabemos que su dominio es el conjunto de los números reales y el conjunto imagen estará sujeto al grado del polinomio.

**Relación del grado y signo del coeficiente dominante del polinomio con la gráfica:**

La gráfica correspondiente a la función subirá o bajará sin límite cuando x se mueve a la izquierda o

a la derecha; si el gráfico sube o baja se sabe por su grado (par o impar) y por el signo del coeficiente dominante.

**Vamos a considerar primero un polinomio de grado par. Sea an el coeficiente principal, es decir el correspondiente al término de mayor grado:**

* **Si a n > 0**

***Sube a la***

***izquierda***

izquierda

***Sube a la***

***derecha***

y

x

* ***Si an < 0***

x

y

***Baja a la izquierda***

***Baja a la***

***derecha***

Consideremos un polinomio de grado impar:

***Sube a la***

***derecha***

***Baja a la***

***izquierda***

y

x

* **Si an > 0**
* **Si a n < 0**

***Sube a la***

***izquierda***

***Baja a la***

***derecha***

x

y

**Relación de la gráfica con las raíces:**

Por el teorema fundamental de álgebra, sabemos que un polinomio tiene tantas raíces como lo indica su grado. Las consecuencias de este teorema son:

1. Un polinomio de grado **n**, tiene exactamente **n** raíces considerando las reales y no reales.
2. Un polinomio de grado **n** tiene como máximo **n** raíces reales.
3. Si un polinomio de grado **n**, tiene **n** raíces reales distintas entonces se puede factorizar de la siguiente manera: y = a n . ( x – x 1) . ( x – x 2) . ( x – x 3) ……( x – x n )

Donde **an**  es el coeficiente principal

Si alguna raíz está repetida, por ejemplo si **x1** está repetida 2 veces y **x2** está repetida 3 veces entonces la factorización queda:

y = a n . ( x – x 1)2 . ( x – x 2)3 . ( x – x 3) ……( x – x n)

la cantidad de veces que está repetida una raíz se llama **grado de multiplicidad** de la raíz, así **x1** tiene grado de multiplicidad 2 y **x2** tiene grado de multiplicidad 3.

Si el grado de multiplicidad de la raíz es par , la grafica de la función polinómica rebota en el eje x. Si el grado de multiplicidad de las raíces es impar, la gráfica atraviesa al eje x.

1. Las raíces no reales se presentan de a pares, por eso un polinomio de grado impar, tiene por lo menos una raíz real ( es decir si z1= a + bi es una raíz también lo es su complejo conjugado z 2 = a - bi.)

Para hallar las raíces de un polinomio debemos factorizarlo, es decir expresarlo como producto de n factores.

**Por ejemplo**:

**y = x 3 –x 2**

factorizamos: y = x 2. ( x -1)

planteamos la ecuación: x 2. ( x -1) = 0 ⇒ las raíces son

x 1 = 0 x 2 = 1

pero el primer factor está elevado al cuadrado por lo tanto la raíz x 1= 0 tiene multiplicidad 2 ( par) ( rebota en el eje x)

y el segundo factor está elevado a la 1, por lo tanto la raíz x 2 = 1 tiene multiplicidad 1 ( impar) ( cruza al eje x)

Si queremos hacer un gráfico aproximado de la función aplicamos lo visto anteriormente:

* Por ser polinómica sabemos que es continua en todo su dominio
* Por ser de grado impar y coeficiente principal positivo , sube a la derecha y baja a la izquierda:
* Rebota en 0 y cruza al eje en 1

Gráficamente

1

1. **Funciones irracionales:**

Son funciones definidas de la siguiente manera

**f: D🡪IR dada por **

donde **P(x)** es un polinomio y **n** un número natural mayor a 1

**Características:**

* **Si n es impar, el dominio D son todos los reales ( D = IR)**
* **Si n es par, el dominio D debe ser mayor o igual a cero ( D =)**
* **Las raíces de estas funciones se obtienen igualando a cero el radicando P(x) =0 y resolviendo la ecuación planteada**

**Por ejemplo:**

a) D = IR





Raíces:

x – 1 = 0 despejando x = 1 es la única raíz

b)



Para calcular el dominio debemos plantear una inecuación P(x) ≥ 0

En este caso sería x+2 ≥0 luego x ≥-2

Por lo tanto D = [ - 2 , ∞ [

Raíces: x + 2 =0 despejando x = -2 es la única raíz



1. **Función exponencial:**

Son funciones definidas de la siguiente manera

**f: IR 🡪IR dada por y = a x**

Donde **a** es un real positivo ( a >0), distinto de 1 ( a≠1), que se llama base de la función exponencial.

**Características:**

* + **En este tipo de funciones el dominio es siempre el conjunto de los números reales (IR), y el conjunto imagen siempre los reales positivos ( IR +)**
  + **No tienen raíces**
  + **Intersecta al eje de ordenadas ( y ), en el punto (0.1)**

Ejemplos:

a) y = 2x D = IR I = IR +



b)  D = IR I = IR +



c) y = e x D= IR I = IR +

( recuerde que el número **e** es un número irracional y su valor es aproximadamente

e = 2,718281.. )



Observe que la monotonía depende de la base:

* + **Es creciente si su base es mayor a 1**
  + **Es decreciente si su base es positiva y menor a 1**

1. **Función logaritmo:**

Son funciones definidas de la siguiente manera

**f : IR + 🡪IR dada por y = log b x**

Donde  **x** es el argumento del logaritmo, y  **b** es la base del logaritmo, el cual debe ser positivo ( b>0 ) y distinto de 1 ( b≠1).

**Características:**

* + **En este tipo de funciones el dominio es siempre el conjunto de los números reales (IR+), y el conjunto imagen es siempre los reales ( IR )**
  + **Tiene una raíz donde el argumento es igual a 1 ( x = 1 )**
  + **No intersecta al eje de ordenadas ( eje y)**

Ejemplos:

a) y =log x D = IR+ I = IR



b)  D = IR+ I = IR



c)  D = IR+ I = IR



d) Si el logaritmo tiene como base al número **e** , se llama logaritmo natural y se anota

y = ln x



Observe que la monotonía depende de la base:

* + **Es creciente si su base es mayor a 1**
  + **Es decreciente si su base es positiva y menor a 1**

1. **Funciones racionales:**

Son funciones definidas de la siguiente manera

f: D🡪IR dada por  donde P(x) y Q(x) son polinomios

El dominio **D** de este tipo de funciones depende de cada ejemplo. En general para buscar el dominio de la función racional, hay que quitar del conjunto de los números reales, las raíces del denominador. Por ejemplo:

 D = IR - {3}

 D = IR ya que no tiene raíces el denominador

 D= IR – {- 3}

Para calcular las raíces de las funciones racionales, hay que igualar a cero la expresión 

Es decir: 

Despejando nos queda P(x) = 0

De las soluciones de esta ecuación hay que analizar cuáles pertenecen al dominio para determinar las raíces

Por ejemplo:

 D = IR – {2 , -2 }

 despejando x – 2 =0 x = 2

Es solución de la ecuación, pero **no pertenece al dominio de la función.** por lo tanto NO TIENE RAÍCES



**OPERACIONES CON FUNCIONES**

Dadas dos ( o más) funciones f(x) y g(x) se pueden combinar, generando así una nueva función cuyas características pueden ser distintas de las que tenían f y g.

Por ejemplo: Sean f(x) = x3 D(f)= IR  D=[1 , ∞[

**Adición de funciones:**

(f+g) (x) = f(x) + g(x) Ej  D = [1 , ∞[

**Multiplicación de funciones:**

(f.g) (x) = f(x) . g(x) Ej:  D = [1 , ∞[

**División de funciones:**

 si g(x) ≠0

Ej:  D= ]1 , ∞[

**Composición de funciones:**

Dadas dos funciones f y g definidas de la siguiente manera:

f : A 🡪 B g : B 🡪 C

se llama función compuesta a la función que se obtiene aplicando primero **f**  y al resultado obtenido se le aplica **g** , y se anota **g(f(x))**

f g

x f(x) g(f(x))

Ej:  D = [1 , ∞[

Observe que si cambiamos el orden de la composición la función obtenida cambia, por eso decimos que la composición de funciones no es **conmutativa**

 D = [1 , ∞[

* [**W**](http://www.ditutor.com/abecedario/w.html)
* [**Y**](http://www.ditutor.com/abecedario/y.html)
* [**A**](http://www.ditutor.com/abecedario/a.html)
* [**B**](http://www.ditutor.com/abecedario/b.html)
* [**C**](http://www.ditutor.com/abecedario/c.html)
* [**D**](http://www.ditutor.com/abecedario/d.html)
* [**E**](http://www.ditutor.com/abecedario/e.html)
* [**O**](http://www.ditutor.com/abecedario/o.html)
* [**Q**](http://www.ditutor.com/abecedario/q.html)
* [**R**](http://www.ditutor.com/abecedario/r.html)
* [**S**](http://www.ditutor.com/abecedario/s.html)
* [**T**](http://www.ditutor.com/abecedario/t.html)
* [**Y**](http://www.ditutor.com/abecedario/y.html)